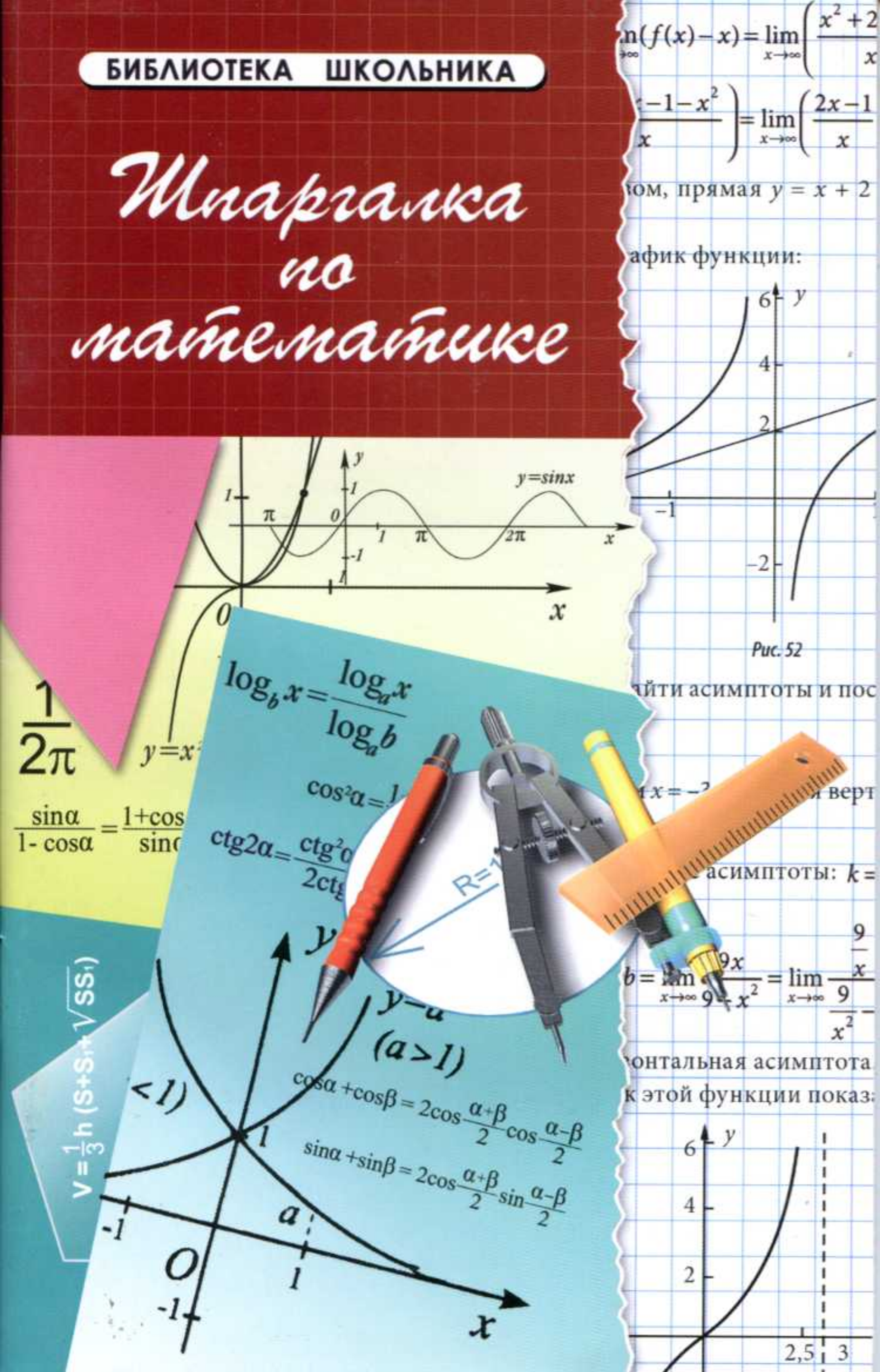
БИБЛИОТЕКА ШКОЛЬНИКА

Шпаргалка по математике



Серия «Библиотека школьника»

С.Г. ХОРОШАВИНА

Шпаргалка

ПО МАТЕМАТИКЕ

Издание девятое

Ростов-на-Дону
«Феникс»
2012

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1
КТК 444
Х 82

Хорошавина С.Г.

Х 82 Шпаргалка по математике / С.Г. Хорошавина. — Изд. 9-е. —Ростов н/Д : Феникс, 2012. — 62 с. : ил. — (Библиотека школьника).

ISBN 978-5-222-19316-7

«Шпаргалка по математике» предназначена в помощь абитуриентам при их подготовке к экзаменам в вуз, к единому государственному экзамену и к централизованному тестированию. Она составлена в соответствии с программой по математике для поступающих в вузы.

Является кратким справочником, содержащим основные математические определения, формулы, определенную символику, которые необходимо знать абитуриенту для того, чтобы успешно пройти испытания по математике.

Снабжена графиками, которые позволяют наглядно представить предлагаемый материал и помочь в его освоении и запоминании.

ISBN 978-5-222-19316-7 УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа — числа 1, 2, 3, употребляемые для счета.	**Простое натуральное число** — натуральное число больше единицы и не имеющее других делителей кроме самого себя и единицы.
Число n делится нацело на m и k, если его можно представить в виде произведения: $n = m \cdot k$.	**Составное натуральное число** — натуральное число больше единицы, имеющее хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого себя.
Каноническое разложение числа — разложение простого числа n на простые множители: $n = P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot P_k^{m_k}$	

Признаки делимости

На 2 делится число, если его последняя цифра делится на 2.	На 8 делится число, если его последние три цифры образуют число, делящееся на 8.
На 3 делится число, если сумма его цифр делится на 3.	На 9 делится число, если сумма его цифр делится на 9.
На 4 делится число, если его последние две цифры образуют число, делящееся на 4.	На 10 делится число, большее или кратное 10, оканчивающееся на 0.
На 5 делится число, последняя цифра которого 0 или 5.	На 25 делится число, последние две цифры которого образуют число, делящееся на 25.
На 6 делится число, которое одновременно делится на 3 и на 2.	

Наибольший общий делитель

Общий делитель — число m, на которое делятся нацело числа n_1 и n_2.	**Наибольший общий делитель** (НОД) — наибольшее число m, на которое делятся нацело числа n_1 и n_2.
Взаимно простые числа — числа n_1 и n_2, НОД которых равен 1.	**Наименьшее общее кратное** (НОК) — наименьшее натуральное число n, которое делится нацело на n_1 и n_2.
Правило нахождения НОД (n_1, n_2): • найти каноническое разложение чисел n_1 и n_2; • выписать все общие простые множители, входящие в канонические разложения каждого из чисел n_1 и n_2; • возвести каждый из выписанных простых множителей в наименьшую степень, с которой этот множитель входит в каноническое разложение чисел n_1 и n_2; • произведение полученных степеней дает НОД (n_1, n_2).	**Правило нахождения НОК** (n_1, n_2): • найти каноническое разложение чисел n_1 и n_2; • выписать все простые множители, входящие в каноническое разложение хотя бы одного из чисел n_1 и n_2; • возвести каждый из выписанных простых множителей в наибольшую степень, с которой этот множитель входит в каноническое разложение чисел n_1 и n_2; • произведение полученных степеней дает НОК (n_1, n_2).

Арифметические действия над рациональными числами

Рациональные числа — все целые и дробные числа (положительные и отрицательные) и число нуль.	**Множество рациональных чисел** — множество дробей $\frac{m}{n}$, где m — целое число ($m \in Z$), n — натуральное число ($n \in N$): $Q = \left\{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$.

Абсолютная величина (модуль) — число a, если $a > 0$; число $-a$, если $a < 0$; 0, если $a = 0$: $$\lvert a\rvert = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0; \\ -a, \text{ если } a < 0; \\ 0, \text{ если } a = 0. \end{cases}$$	Если дано не число a, а функция $f(x)$, то: $$\lvert f(x)\rvert = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) > 0; \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0; \\ 0, \text{ если } f(x) = 0. \end{cases}$$
Геометрически $\lvert a\rvert$ — длина отрезка числовой прямой от начала отсчета до точки, соответствующей числу a.	
Длина отрезка и модуль числа — положительные числа или нуль.	

Правила при действиях с рациональными числами:

- при сложении чисел с одинаковыми знаками необходимо сложить их модули и перед суммой поставить их общий знак;
- при сложении двух чисел с разными знаками из числа с большим модулем вычитают число с меньшим модулем и перед полученной разностью ставят знак числа, имеющего больший модуль;
- при вычитании одного числа из другого нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a - b = a + (-b)$;
- при умножении двух чисел с одинаковыми знаками перемножаются их модули и перед полученным произведением ставится знак ***плюс***;
- при умножении двух чисел с разными знаками перемножаются их модули и перед полученным произведением ставится знак ***минус***;
- при делении чисел с одинаковыми знаками модуль делимого делят на модуль делителя и перед полученным частным ставится знак ***плюс***;
- при делении чисел с разными знаками модуль делимого делят на модуль делителя и перед полученным частным ставится знак ***минус***;
- при делении и умножении нуля на любое число, не равное нулю, получается нуль:
- на нуль делить нельзя.

Действия со степенями

Степень числа a с натуральным показателем n — произведение n множителей, каждый из которых — a: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a\ (a \in R, n \in N)$
Степень a^α числа a с целым показателем α — число, определяемое следующим образом: • $a^0 = 1$, если $a \neq 0$; • $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ \text{сомножителей}}$, если $\alpha = m,\ m \in N$; • $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, если $a \neq 0$, $\alpha = -m,\ m \in N$. Степень a^α с целым показателем не определяется при $a = 0$ для $\alpha = 0$ и $\alpha < 0$.

Основные свойства степени с целым показателем

Пусть a и b — действительные числа, отличные от нуля, $n \in Z$, $m \in Z$. Тогда:	
• $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; • $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; • $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;	• $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; • $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
Если:	
• $a > 0$, то $a^n > 0$; • $0 < a < 1$; то $n > m \Leftrightarrow a^n < a^m$; $a > 0$ и $a \neq 1$, то $a^n = 1 \Leftrightarrow n = 0$.	• $a > 1$, то $n > m \Leftrightarrow a^n > a^m$; • $a > 0$ и $a \neq 1$, то $a^n = a^m \Leftrightarrow n = m$;

Степень с рациональным показателем

Арифметический корень *n*-й степени ($n \geq 2$, $n \in N$)	
Для любого неотрицательного числа a и натурального числа n ($n \geq 2$) существует единственное неотрицательное число b, такое, что $b^n = a$ и обозначается $\sqrt[n]{a}$.	Отсюда следует, что: • $\sqrt[n]{a} = 0$ только при $a = 0$; • $\sqrt[n]{a} = 1$ только при $a = 1$; • если $a \geq 0$, то арифметический корень $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

Свойства арифметических корней	
Пусть $a > 0$, $b > 0$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $k \geq 2$ (n, m, $k \in N$). Тогда:	
• $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$; • $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; • $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; • $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;	• $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$; • $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$; • $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{b}} = \sqrt[nk]{a^{n-k}}$; • $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;.

Формулы сокращенного умножения и разложения на множители

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$
$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$	$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab \cdot (a - b)$
$x^n - a^n = (x - a) \cdot (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + ... + a^{n-1})$	
$ax^2 + bx + c = a(x-x_1) \cdot (x-x_2)$ где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.	
Степени и корни $a^p \cdot a^g = a^{p+g}$ $\frac{a^p}{a^g} = a^{p-g}$ $(a^p)^g = a^{pg}$ $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$ $a^p \cdot b^p = ab^p$ $a^0 = 1$; $a^1 = a$ $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ $p^{\sqrt{a}} = b \Rightarrow b^p = a$ $p^{\sqrt{a}} p^{\sqrt{b}} = p^{\sqrt{ab}}$	**Квадратное уравнение** $ax^2 + bx + c = 0$; $(a \neq 0)$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $D = b^2 - 4ac$ $D > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$; $D = 0 \rightarrow x_1 = x_2$ $D < 0$, корней нет.

ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом данного числа x по основанию a называется показатель степени y, в которую нужно возвести a, чтобы получить число x: $y = \log_a x$.	Из определения логарифма следует, что решение показательного уравнения $y = a^x$ ($y > 0$, $x > 0$, $y \neq 1$) является $x = \log_a y$. Функция, обратная показательной, называется **логарифмической**.
Из определения логарифма вытекает логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = x$.	**Прологарифмировать** некоторое выражение — значит выразить его логарифм через входящие в это выражение величины.

Основные свойства логарифмов

- При положительном основании отрицательные числа не имеют логарифма:
  $x = a^y$; $a > 0$, $a^y > 0$.
- При всяком основании, не равном 1, логарифм единицы есть нуль:
  $\log_a 1 = 0$.
  $a > 0$; $x = a^y$; при $a \neq 1$
  и $x = 1$ $a = 1$, $y = 0$.
- При основании, большем 1, логарифмы чисел, больших 1, положительны, а меньших 1 — отрицательны:
  $a > 1$; $x > 0 \Rightarrow y > 1$;
  $a > 0$; $x < 0 \Rightarrow y < 1$.
- Логарифм самого основания есть 1:
  $\log_a a = 1$.
- Логарифм частного равен логарифму делимого без логарифма делителя:
  $$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$
- Логарифм корня равен частному от деления подкоренного выражения на показатель корня:
  $$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$
- $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$
- $$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x,\ k \neq 0.$$
- логарифм степени:
  $\log_a x^k = k \log_a x$ $(x > 0)$.
- $$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

• При основании, большем 1, большему числу соответствует больший логарифм: $a > 1, x = a^y \Rightarrow$ $x_2 > x_1$, если $y_2 > y_1$. • Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.	• переход от одного основания логарифма к другому: $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$; $c > 0$, $c \neq 1$.

Десятичные логарифмы

Для практического применения наиболее удобным основанием логарифмов является число 10 — **десятичный логарифм** (lg), именуемый просто логарифмом. • логарифм единицы равен нулю: $\lg 1 = 0$; • логарифмы 10, 100, 1000 и т.д. равны 1, 2, 3 и т.д., т.е. имеют столько положительных единиц, сколько нулей стоит после единицы.	• логарифмы чисел 0,1; 0,01; 0,001 и т.д. равны -1, -2, -3 и т.д., т.е. имеют столько отрицательных единиц, сколько нулей стоит перед единицей. • логарифмы остальных чисел имеют дробную часть, именуемую **мантиссой**, целая часть логарифма называется **характеристикой**. • числа, большие 1, имеют положительные логарифмы; положительные числа, меньшие 1, имеют отрицательные логарифмы.

Натуральные логарифмы. Число e

Логарифмы, взятые по основанию e, называются **натуральными логарифмами** (ln).	Иррациональное **число** e есть предел, к которому стремится $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n: $e = 2{,}71828183\ldots$

Чтобы по известному десятичному логарифму числа N найти его натуральный логарифм, нужно разделить десятичный логарифм числа N на десятичный логарифм числа e (равный 0,43429...): $\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} \approx \frac{\lg N}{0,43429} \approx$ $\approx 2,30259 \lg N$.	Чтобы по известному натуральному логарифму числа N найти его десятичный логарифм, нужно умножить натуральный логарифм на модуль десятичных логарифмов $M = \lg e$: $\lg N = \lg e \cdot \ln N = M \ln N =$ $= 0,43429 \ln N$. **Модулем десятичных логарифмов** называется величина $M = \lg e = 0,43429$.

ОДНОЧЛЕН И МНОГОЧЛЕН

Одночлен

Одночленом называется произведение двух или нескольких сомножителей, каждый из которых есть либо число, либо буква, либо степень буквы. $2d$, a^3b, $3abc$, $4x^2y^3$ — одночлены. Отдельно взятое число или отдельно взятая буква тоже могут рассматриваться как одночлены.	
Любой из сомножителей одночлена называется его **коэффициентом**.	
Умножение одночленов Произведение двух или нескольких одночленов можно упростить, если в них входят некоторые степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты: показатели степеней у соответствующих букв складываются; числовые коэффициенты перемножаются.	**Деление одночленов** Частное двух одночленов можно упростить, если делимое и делитель содержат некоторые степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты: показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого; числовой коэффициент делимого делится на числовой коэффициент делителя.

Одночлены называются **подобными**, если они одинаковы или отличаются только коэффициентом. Если коэффициентом считать числовые множители, то подобными одночленами будут такие, у которых одинаковы буквенные части.	**Приведение подобных членов (вынесение за скобки)** — запись вместо слагаемых члена, коэффициент которого равен сумме их коэффициентов.

Многочлен

Многочленом называется сумма одночленов.	
Сложение двух или нескольких **многочленов** — образование нового многочлена, включающего в себя все члены всех взятых многочленов.	**Вычитание многочленов** — прибавление многочлена, члены которого образованы из членов взятого многочлена переменой знака на обратный.

Квадратный трехчлен

Пусть $f(x) = ax + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2, а M — какое-нибудь действительное число, $D = b - 4ac$.

Утверждение 1. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число M (т.е. лежали на числовой оси левее, чем точка M), необходимо и достаточно выполнение следующих условий (рис. 1, 2):

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

$a > 0$

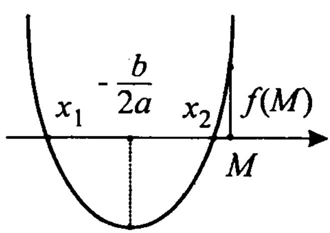


Рис. 1

$a < 0$

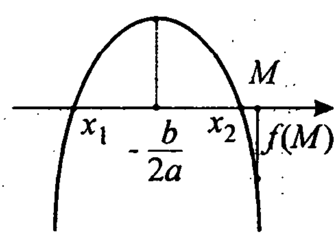


Рис. 2

Утверждение 2. Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число M, а другой больше, чем число M (т.е. точка M лежала бы между корнями), необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 3, 4):

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0. \end{cases}$$

$a > 0$

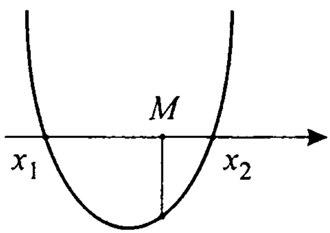


Рис. 3

$a < 0$

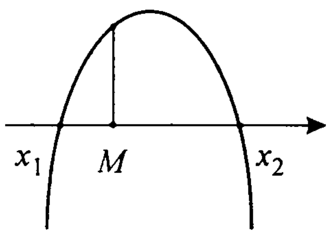


Рис. 4

Утверждение 3. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число M (т.е. лежали на числовой оси правее, чем точка M), необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 5, 6):

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > M, \\ f(M) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

$a > 0$

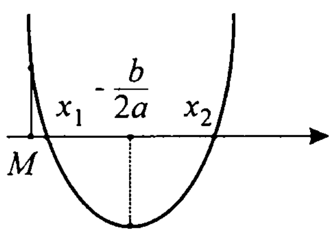


Рис. 5

$a < 0$

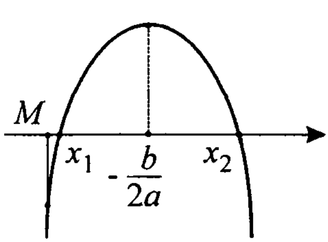


Рис. 6

Утверждение 4. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число M, но меньше, чем число N ($M<N$), т.е. лежали в интервале между M и N, необходимо и достаточно (рис. 7, 8):

$$\begin{cases} a>0, \\ D\ge 0, \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N, \\ f(M)>0, \\ f(N)>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a<0, \\ D\ge 0, \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N, \\ f(M)<0, \\ f(N)<0. \end{cases}$$

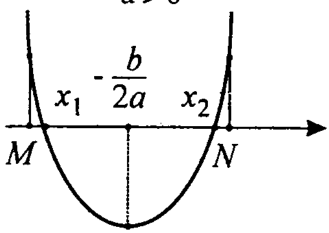


Рис. 7

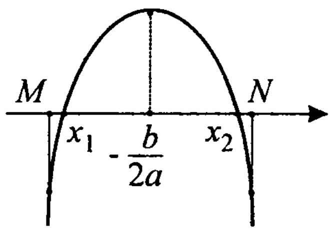


Рис. 8

Утверждение 5. Для того чтобы только больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале $[M,N]$ ($M<N$), необходимо и достаточно (рис. 9, 10):

$$\begin{cases} a>0, \\ f(M)<0, \\ f(N)>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a<0, \\ f(M)>0, \\ f(N)<0. \end{cases}$$

(при этом меньший корень лежит вне отрезка $[M, N]$).

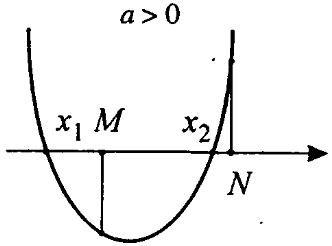


Рис. 9

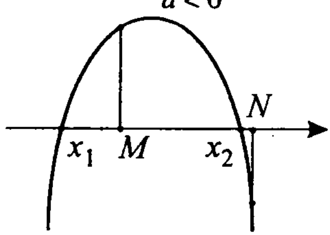


Рис. 10

Утверждение 6. Для того чтобы только меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале $[M, N]$, необходимо и достаточно (рис. 11, 12):

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$$

(при этом больший корень лежит вне отрезка $[M, N]$).

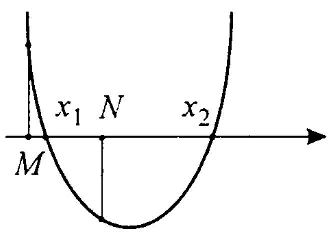


Рис. 11

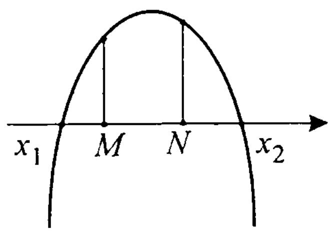


Рис. 12

Утверждение 7. Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем M, а другой больше, чем N ($M < N$), т.е. отрезок $[M, N]$ целиком лежал внутри интервала между корнями, необходимо и достаточно (13, 14):

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$$

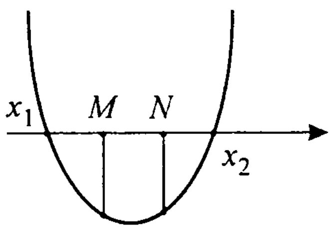


Рис. 13

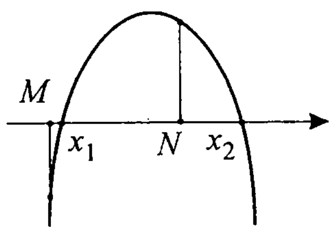


Рис. 14

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

<table>
<tr><td colspan="2">Функцией (или функциональной зависимостью) называется закон, по которому каждому значению независимой переменной x из некоторого множества чисел, называемого областью определения функции, ставится в соответствие одно вполне определенное значение величины y.</td></tr>
<tr><td>Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости с координатами (x, y), такими, что абсцисса x принимает все значения из области определения, а ордината y равна значению функции в точке x.</td><td>Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x, принадлежащего области определения функции, $x - T$, $x + T$ также принадлежат области определения и ее значения в точках x, $x - T$, $x + T$ равны.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Совокупность значений, которые принимает зависимая переменная y, называется областью значений функции.</td></tr>
<tr><td>Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из ее области определения $-x$ также принадлежит области определения, причем $f(-x) = f(x)$, т.е. при замене знака аргумента значение функции не меняется. Ее график симметричен относительно оси ординат 0Y.</td><td>Функция $f(x)$ называется нечетной, если для любого x из ее области определения $-x$ также принадлежит области определения, причем, $f(-x) = -f(x)$, т.е. при замене аргумента меняется знак функции. Ее график не симметричен относительно оси ординат 0Y.</td></tr>
<tr><td>Функция $f(x)$ возрастает на некотором интервале, если для любых значений x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.</td><td>Функция $f(x)$ убывает на некотором интервале, если для любых значений x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.</td></tr>
<tr><td>Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если для всех значений x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.</td><td>Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если для всех значений x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.</td></tr>
</table>

Схема исследования

При описании функции $y = f(x)$ принято указывать:

1. Область определения $D(x)$ и область значений $E(y)$ функции.
2. Является ли функция периодической.
3. Является ли функция четной или нечетной.
4. Точки пересечения графика с осями координат.
5. Промежутки знакопостоянства функции.
6. Интервалы возрастания и убывания.
7. Точки экстремума и экстремальные значения.
8. Наличие асимптот.
9. График.

Обратные функции

Две функции называются **обратными**, если они выражают одну и ту же зависимость между переменными величинами и в одной из них за аргумент принят x, а за функцию y; в другой — наоборот, т.е. за аргумент принят y, а за функцию — x. Функции $y = f(x)$ и $x = f(y)$ — обратные функции.	Если функция $y = f(x)$ монотонна в рассматриваемом интервале $[a, b]$, то существует обратная к ней функция.

ПРОГРЕССИИ

Последовательности

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел: $y^n = f(n),\ n \in N.$	Формула $y^n = f(n)$, позволяющая вычислить любой член последовательности, называется **формулой общего члена последовательности** (общим членом последовательности).

Прогрессии

Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел, при которой каждый член, начиная со второго, равняется предыдущему, сложенному с одним и тем же, постоянным для этого ряда числом.	**Геометрической прогрессией** называется такая последовательность чисел, при которой каждый член, начиная со второго, равняется предыдущему, умноженному на одно и то же число, постоянное для данной последовательности.
Числа, составляющие прогрессию, называются ее **членами**. Число, которое нужно прибавить к предыдущему члену, чтобы получить последующий, называется **разностью прогрессии**.	В геометрической последовательности частное от деления последующего члена на предыдущий называется **знаменателем прогрессии** q ($q \neq 0$).
Общий член арифметической прогрессии a_n равен первому ее члену a_1, сложенному с произведением разности прогрессии d на число членов n, предшествующих определяемому: $$a_n = a_1 + d(n-1).$$	Любой член геометрической прогрессии b_n, знаменатель которой q, определяется: $$b_n = b_{n-1} \cdot q;$$ $$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$
Сумма всех n членов арифметической прогрессии равна половине произведения суммы крайних членов на число членов: $$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} =$$ $$= \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$	**Сумма** первых n членов геометрической прогрессии $$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},$$ $(q \neq 1)$; Если знаменатель прогрессии q по абсолютной величине меньше 1 ($\lvert q \rvert < 1$), то $$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

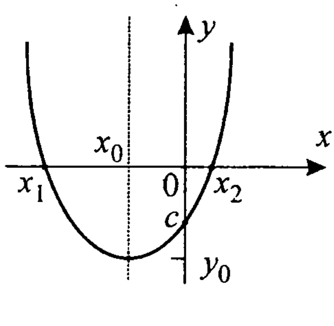
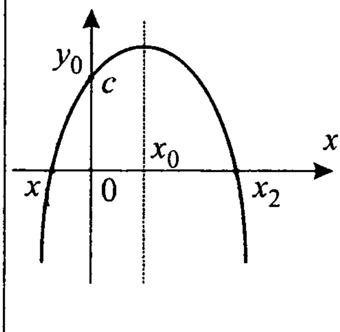
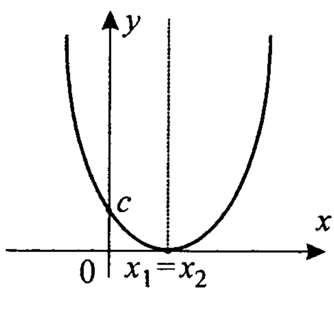
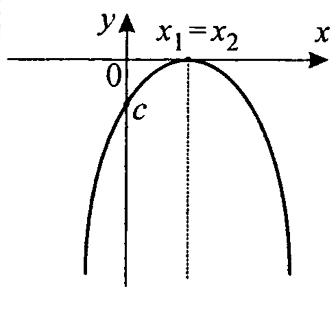
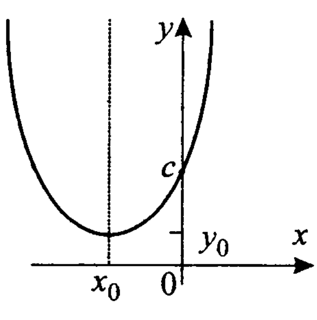
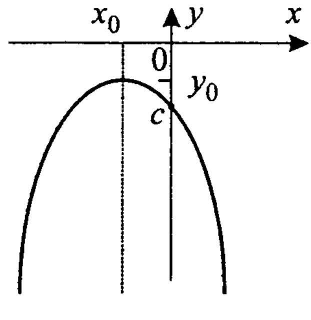
Свойства прогрессий

Арифметическая прогрессия	**Геометрическая прогрессия**
• Каждый средний член арифметической прогрессии равен полусумме равноотстоящих от него членов: $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$.	• Квадрат каждого среднего члена геометрической прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов: $b^2_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.
• В конечной арифметической прогрессии суммы двух членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме крайних членов: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = 2a_1 + d(n-1)$.	• В конечной геометрической прогрессии произведения двух членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов: $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

<table>
<tr><td colspan="6">Функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ называется квадратичной функцией.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Выделим полный квадрат: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x_0 = \frac{-b}{2a}$,</td><td colspan="2">$y_0 = \frac{-D}{4a}$,</td><td colspan="2">$D = b^2 - 4ac$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$ax^2+bx+c= 0$, $a \neq 0$</td><td colspan="2">$D > 0$
$D = 0$
$D < 0$</td><td colspan="2">$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$x = \frac{b}{2a}$
корней нет</td></tr>
<tr><td colspan="3">Теорема Виета
Для того, чтобы числа x_1 и x_2 были решениями уравнения $ax^2+bx+c= 0$, необходимо и достаточно, чтобы:
• $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$,
• $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.</td><td colspan="3">Приведенное квадратное уравнение
$x^2 + px+q =0$
$x_1+x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$
Если $p=2k$ (p — четное) и $x^2 +2kx+q = 0$, то
$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - q}$.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Графиком квадратичной функции является парабола, получаемая из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов:
• сдвига вдоль оси OX на x_0 единиц влево, если $x_0 < 0$ (рис. 15), и вправо, если $x_0 > 0$ (рис. 16);
• сдвига вдоль оси OY на y_0 единиц вверх, если $y_0 > 0$ (рис. 19), и вниз, если $y_0 < 0$ (рис. 20).
Точка с координатами (x_0; y_0) называется вершиной параболы.
Вершина параболы смещается вправо по оси OX при $D = 0$ (рис. 17, 18).</td></tr>
</table>

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 Рис. 15	 Рис. 16
$D = 0$	 Рис. 17	 Рис. 18
$D < 0$	 Рис. 19	 Рис. 20

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Двучленом первой степени от x или **линейным двучленом** от x называется выражение вида $kx + b$, где k и b — константы.	Функция y, значения которой выражаются через значения независимой переменной в виде линейного двучлена $kx + b$, называется **линейной функцией**: $y = kx + b$, $k > 0$ и $b > 0$.
График линейной функции есть **прямая линия** (рис. 21).	

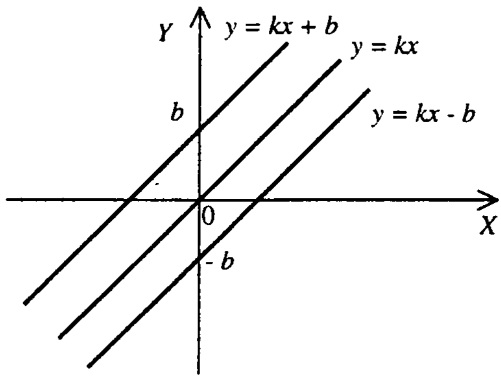


Рис. 21

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется **показательной функцией** с основанием a.

	$0 < a < 1$	$a > 1$
Пример	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = 2^x$
Область определения	$x \in (-\infty;+\infty)$	$x \in (-\infty;+\infty)$
Множество значений	$y \in (0;+\infty)$	$y \in (0;+\infty)$
Пересечение с осью Y	при $x = 0$, $y = 0$.	при $x = 0$, $y = 0$.

Монотонность	Функция убывает на всей числовой прямой.	Функция возрастает на всей числовой прямой.
Поведение на ∞ : • при $x \to \infty$ • при $x \to -\infty$	$a^x \to 0$, ось абсцисс — горизонтальная асимптота (рис. 22); $a^x \to +\infty$	$a^x \to +\infty$ $a^x \to 0$, ось абсцисс — горизонтальная асимптота (рис. 23).

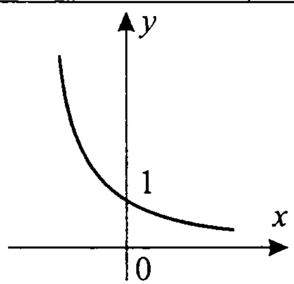


Рис. 22

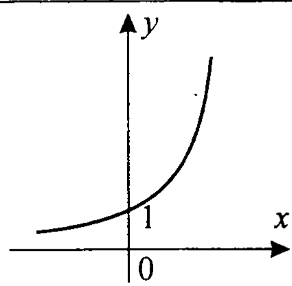


Рис. 23

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется **логарифмической функцией** с основанием a.

	$0 < a < 1$	$a > 1$
Область определения	$x \in (0;+\infty)$	$x \in (0;+\infty)$
Множество значений	$y \in (-\infty;+\infty)$	$y \in (-\infty;+\infty)$
Пересечение с осями координат	• с осью 0X: $x = 0, y = 0$; • с осью 0Y пересечения нет.	• с осью 0X: $x = 0, y = 0$; • с осью 0Y пересечения нет.
Монотонность	Убывающая функция	Возрастающая функция

Поведение при $x \to 0$	$y \to +\infty$, ось ординат — вертикальная асимптота	$y \to -\infty$, ось ординат — вертикальная асимптота
Поведение при $x \to \infty$	$y \to -\infty$	$y \to +\infty$
Графики функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ симметричны относительно прямой y, т.е. эти функции **взаимообратимы**.		

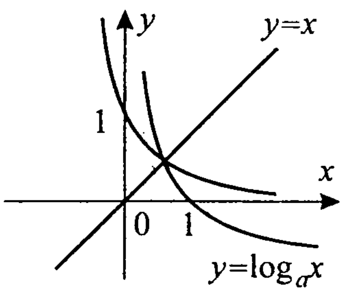


Рис. 24

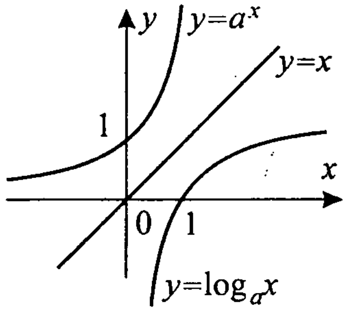


Рис. 25

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функции	$y = ax + b$	$y = x^2$	$y = x^3$
$D(x)$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
$E(y)$	$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
Период	—	—	—
Четность	четная при $a = 0$, нечетная при $b = 0$.	четная	нечетная
Корни	$x = -\frac{b}{a}$ при $a \neq 0$	$x = 0$	$x = 0$

Функции	$y = ax + b$	$y = x^2$	$y = x^3$
Монотонность	при $a < 0$ убывает при $a > 0$ возрастает при $a = 0$ постоянная	убывает на $(-\infty; 0)$; возрастает на $(0; \infty)$.	возрастает
Экстремумы	—	min при $x = 0$	—

Функции	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sqrt{x}$
$D(x)$	$(-\infty;0) \cup (0;\infty)$	$[0;\infty)$
$E(y)$	$(-\infty;0) \cup (0;\infty)$	$[0;\infty)$
Период	—	—
Четность	нечетная	—
Корни	нет	$x = 0$
Монотонность	убывает на каждом из интервалов: $(-\infty;0)$ и $(0; +\infty)$	возрастает
Экстремумы	—	min при $x = 0$

Графики элементарных функций

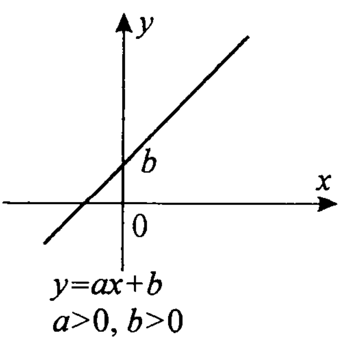


Рис. 26

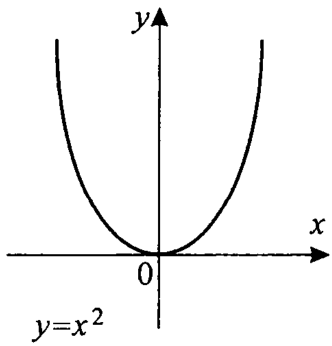


Рис. 27

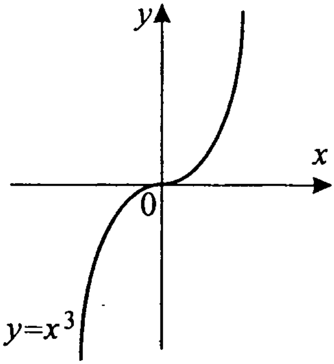


Рис. 28

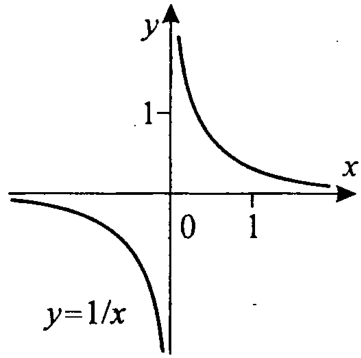


Рис. 29

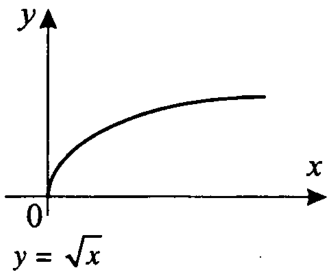


Рис. 30

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Основные тригонометрические функции

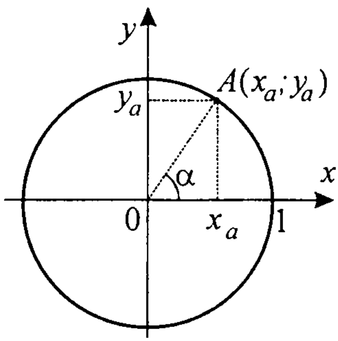


Рис. 31

Пусть A — точка окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице, α — угол между положительным направлением оси абсцисс и вектором $\overrightarrow{OA}$ (рис. 31).

Если отсчет ведется **против часовой стрелки**, то величина угла считается **положительной**, а если по часовой стрелке — **отрицательной**.

Если прямоугольные координаты точки A — (x_a, y_a), то тригонометрические функции синус и косинус определяются формулами:

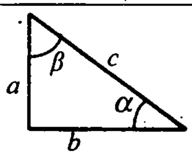
$\sin \alpha = y_a$; $\cos \alpha = x_a$.

Угол может измеряться как в градусах, так и в радианах и изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. При использовании радианного измерения обозначение радиан опускается и тогда тригонометрические функции считаются **функциями числового аргумента**.

Для острых углов тригонометрические функции можно определить как отношение сторон прямоугольного треугольника (рис. 32).

Соотношения в прямоугольном треугольнике

Отношение противолежащего катета к гипотенузе называется **синусом** острого угла.	Отношение прилежащего катета к гипотенузе называется **косинусом** острого угла.
Отношение противолежащего катета к прилежащему называется **тангенсом** острого угла.	Отношение прилежащего катета к противолежащему называется **котангенсом** острого угла.

 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$ Рис. 32.	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$ $\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b}$

Тригонометрические функции

$\sin x = \frac{a}{c}$	$\mathrm{tg}\,(\alpha + \pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha$
$\cos x = \frac{b}{c}$	$\mathrm{ctg}\,(\alpha + \pi k) = \mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{tg}\,x = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\mathrm{ctg}\,x = \frac{b}{a} = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$, $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi(2n+1)}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$	$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \neq \pi n$.
$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$	
$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$	

Соотношения между функциями

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\sin 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2x}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha} = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\ \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы тройного аргумента

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha} = \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}+\alpha) \cdot \mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}-\alpha)$$

$$\mathrm{ctg}\,3\alpha = \frac{ctg^3\alpha - 3tg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1} = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha}$$

Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy};\ x,\ y,\ x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\mathrm{tg}(x-y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx \cdot tgy};\ x,\ y,\ x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\mathrm{ctg}(x+y) = \frac{ctgx \cdot ctgy - 1}{ctgx + ctgy} \qquad \mathrm{ctg}(x-y) = \frac{ctgx \cdot ctgy + 1}{ctgx - ctgy}$$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x = \cos(x+y) \cdot \cos(x-y)$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} \qquad \mathrm{ctg}\,x + \mathrm{ctg}\,y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cdot \sin y}$$

$$\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y} \qquad \mathrm{ctg}\,x - \mathrm{ctg}\,y = \frac{\sin(x-y)}{\sin x \cdot \sin y}$$

Формулы преобразования произведения в сумму
$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$ $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$ $\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$ $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=\frac{tgx+tgy}{ctgx+ctgy}=-\frac{tgx-tgy}{ctgx-ctgy}$ $\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{tg}y=\frac{ctgx+tgy}{tgx+ctgy}=-\frac{ctgx-tgy}{tgx-ctgy}$ $\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y=\frac{ctgx+ctgy}{tgx+tgy}=-\frac{ctgx-ctgy}{tgx-tgy}$

Соотношения между прямыми и обратными тригонометрическими функциями	
$\sin(\arcsin\alpha)=\alpha;\ \lvert\alpha\rvert\le 1$	$\cos(\arccos\alpha)=\alpha;\ \lvert\alpha\rvert\le 1$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\alpha)=\alpha$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\alpha)=\alpha$

$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha;\ \alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\arccos(\cos\alpha)=\alpha;\ \alpha\in[0;\pi]$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha;\ \alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha;\ \alpha\in[0;\pi]$

$\arcsin(\sin\alpha)=$
- $\alpha-2\pi k;\ \alpha\in[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k]$
- $(2k+1)\pi-\alpha;\ \alpha\in[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k]$

$\arccos(\cos\alpha)=$
- $\alpha-2\pi k;\ \alpha\in[2\pi k;\ (2k+1)\pi]$
- $2\pi k-\alpha;\ \alpha\in[(2k-1)\pi;\ 2\pi k]$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha-\pi k;\ \alpha\in(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k)$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha - \pi k;\ \alpha \in (\pi k;\ (k+1)\pi)$

$\arcsin \alpha + \arccos \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

$\operatorname{arcctg} \alpha + \operatorname{arctg} \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Тригонометрические тождества

$$\arcsin \alpha = -\arcsin(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)}}$$

$$\arccos \alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)}}$$

$$\operatorname{arctg} \alpha = -\operatorname{arctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} \alpha = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$$

$$\operatorname{arcctg} \alpha = \pi - \operatorname{arc\,cctg}(-\alpha) = \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)}}$$

$$\operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\alpha} = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = 0$	$x = \pi k$	$\cos x = 0$	$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$
$\sin x = 1$	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\cos x = 1$	$x = 2\pi k$
$\sin x = -1$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k$
$\sin x = a$ $\lvert a \rvert = 1$	$x = (-1)^k \arcsin a +$ $+ \pi k;\ k \in Z$	$\cos x = a$ $\lvert a \rvert = 1$	$x = \pm \arccos a +$ $+ 2\pi k;\ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$	$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$

Тригонометрические уравнения	Тригонометрия:
$\sin\frac{x}{2}=\frac{2tgx}{1+tg^2x}$ $\cos\frac{x}{2}=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$	1. **Разложение на множители:** $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ $2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0$ $\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$ .... 2. **Решения заменой ...** 3. $\sin^2 x - \sin 2x + 3\cos^2 x =$ $= 2\sin^2 x - 2\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x =$ $= 2\sin^2 x + \cos^2 x$ Дальше пишется: если $\sin x = 0$, то и $\cos x = 0$, а такое невозможно, $\Rightarrow$ можно поделить на $\cos x$ ...

Тригонометрические неравенства

I. $\sin\alpha\geq m$ $2\pi k+\alpha_1=\alpha=\alpha_2+2\pi k$ $2\pi k+\alpha_2=\alpha=(\alpha_1+2\pi)+2\pi k$	II. $\cos\alpha\geq(=)\,m$ $2\pi k+\alpha_1<\alpha<\alpha_2+2\pi k$ $2\pi k+\alpha_2<\alpha<(\alpha_1+2\pi)+2\pi k$
III. $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ $2\pi k+\frac{5\pi}{6}=\alpha=\frac{13\pi}{6}+2\pi k$	IV. $\cos\alpha\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $2\pi k+\frac{5\pi}{4}=\alpha=\frac{11\pi}{4}+2\pi k$
V. $\mathrm{tg}\,\alpha\geq(=)\,m$ $\pi k+\mathrm{arctg}\,m=\alpha=\mathrm{arctg}\,m+$ $+\pi k$	VI. $\mathrm{ctg}\,\alpha\geq(=)\,m$ $\pi k+\mathrm{arcctg}\,m<\alpha<\pi+\pi k$

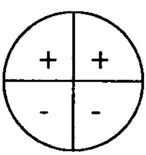
Значение функций для некоторых углов α

рад α	$0; 2\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
град	$0; 360°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$			
$\text{ctg}\,\alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0		0
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$		$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$		$\text{tg}(-\alpha) = \text{tg}\alpha$		$\text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg}\alpha$	
1 рад = 57°							

Формулы приведения

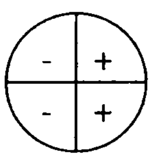
рад β	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$2\pi - \alpha$
град	$90° \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$	$360° - \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\text{tg}\,\beta$	$\mp \text{tg}\,\alpha$	$\pm \text{tg}\,\alpha$	$\mp \text{tg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$
$\text{ctg}\,\beta$	$\mp \text{tg}\,\alpha$	$\pm \text{ctg}\,\alpha$	$\mp \text{tg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$

Знаки тригонометрических функций



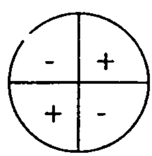
$\sin\alpha$

Рис. 33



$\cos\alpha$

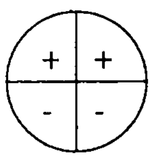
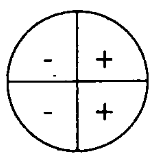
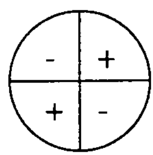
Рис. 34



$\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha$

Рис. 35

Свойства тригонометрических функций, графики

Функции	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
1.Область определения	$x\in(-\infty;+\infty)$	$x\in(-\infty;+\infty)$	$x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$
2. Множество значений	$y\in[-1;1]$	$y\in[-1;1]$	$y\in[-\infty;+\infty]$
3. Периодичность	Все тригонометрические функции — периодические с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$	$T = 2\pi$	$T = \pi$
4. Четность	нечетная $\sin(-x)= -\sin x$	четная $\cos(-x) = \cos x$	нечетная $\operatorname{tg}(-x)= -\operatorname{tg} x$
5.Нули функции	$\sin x=0$ при $x = \pi n,\ n\in Z$	$\cos x=0$ при $x = \frac{\pi}{2}+\pi n,$ $n\in Z$	$\operatorname{tg} x =0$ при $x = \pi n,\ n\in Z$
6. Интервалы знакопостоянства	 Рис. 36. $\sin x > 0$ для $x\in(2\pi n;$ $2\pi n+\pi)\ n\in Z$ $\sin x < 0$ для $x\in(\pi+2\pi n;$ $2\pi+2\pi n)$ $n\in Z$	 Рис. 37. $\cos x > 0$ для $x\in(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;$ $\frac{\pi}{2}+2\pi n)\ n\in Z$ $\cos x < 0$ для $x\in(\frac{\pi}{2}+2\pi n;$ $\frac{3\pi}{2}+2\pi n)$	 Рис. 38. $\operatorname{tg} x > 0$ для $x\in(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+$ $+\pi n)\ n\in Z$ $\operatorname{tg} x < 0$ для $x\in(\frac{\pi}{2}+\pi n;$ $\pi+\pi n)\ n\in Z$

Итоговые таблицы исследования тригонометрических функций и их графики

Монотонность, производные тригонометрических функций	Зная производные тригонометрических функций: $\sin' x = \cos x$; $\cos' x = -\sin x$; $\mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ и условие возрастания (на промежутках, где производная функции положительна) и убывания (на промежутках, где производная функции отрицательна), можно составить следующую таблицу:							
$y = \sin x$	$0;\ \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2};\pi$	π	$\pi;\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2};2\pi$	2π
	$\nearrow$	max	$\searrow$	перегиб	$\searrow$	min	$\nearrow$	перегиб

График функции $y = \sin x$ имеет вид:

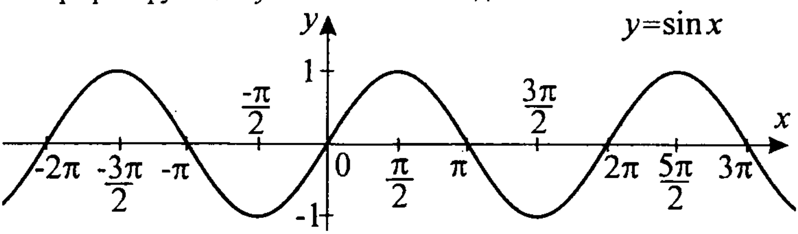


Рис. 39

$y = \cos x$	$0;\ \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2};\pi$	π	$\pi;\ \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2};\ 2\pi$	2π
	$\searrow$	перегиб	$\searrow$	min	$\nearrow$	перегиб	$\nearrow$	max

График функции $y = \cos x$ имеет вид:

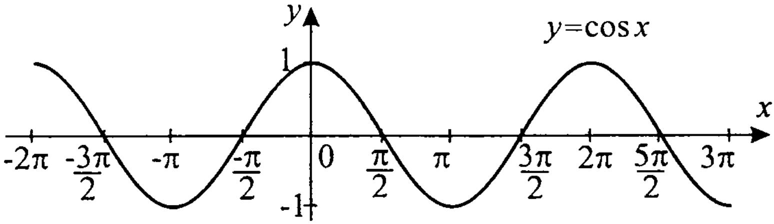


Рис. 40

$y = \operatorname{tg} x$	$0; \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}; \pi$	π	$\pi; \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}; 2\pi$	2π
	↗	перегиб	↗	разрыв	↗	перегиб	↗	разрыв

График функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет вид:

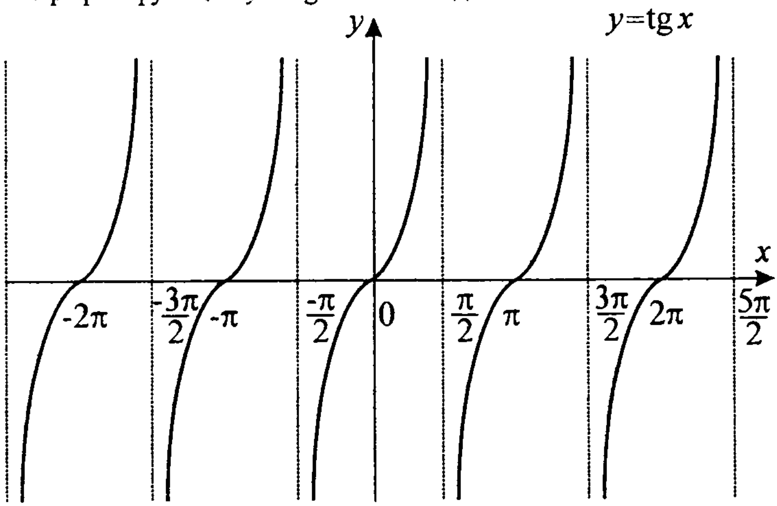


Рис. 41

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ имеет вид:

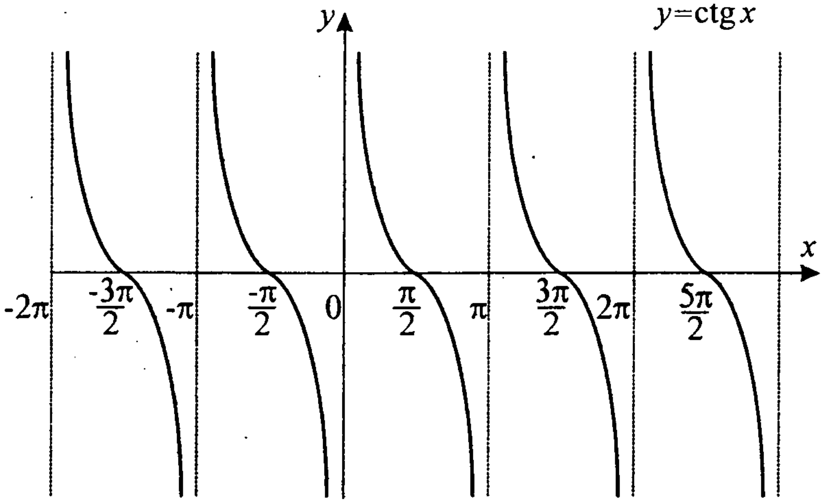


Рис. 42

Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа a называется угол, взятый в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, причем $\lvert a\rvert < 1$, т.е. если $\sin x = a$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $x = \arcsin a$.
Арккосинусом числа a называется угол, взятый в промежутке $[0; \pi]$, косинус которого равен a, причем $\lvert a\rvert < 1$, т.е. если $\cos x = a$, $x \in [0; \pi]$, то $x = \operatorname{arccosin} a$.
Арктангенсом числа a называется угол, взятый в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, тангенс которого равен a, причем a — любое число, т.е. если $\operatorname{tg} x = a$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $x = \operatorname{arctg} a$.
Арккотангенсом числа a называется угол, взятый в промежутке $[0; \pi]$, котангенс которого равен a, причем a — любое число, т.е. если $\operatorname{ctg} x = a$, $x \in [0; \pi]$, то $x = \operatorname{arcctg} a$.

Графики обратных тригонометрических функций

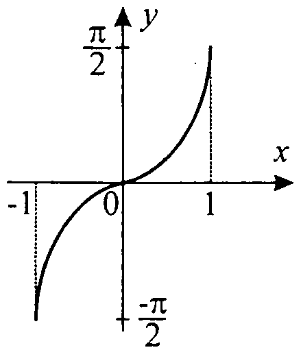
<table>
<tr><td>$y = \arcsin x\ \lvert x\rvert \le 1$</td><td>$y = \arccos x\ \lvert x\rvert \le 1$</td></tr>
<tr><td>


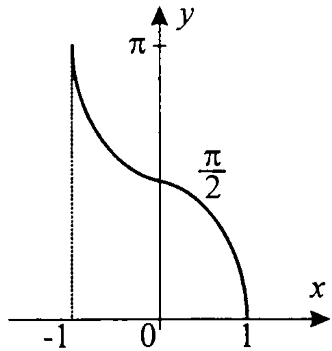
Рис. 43
</td><td>


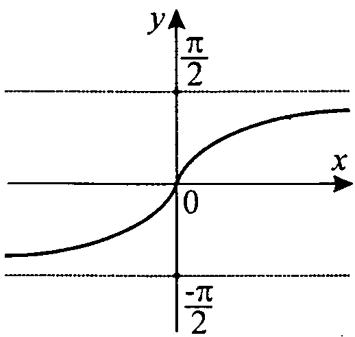
Рис. 44
</td></tr>
<tr><td>$y = \operatorname{arctg} x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$</td><td>$y = \operatorname{arcctg} x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$</td></tr>
<tr><td>


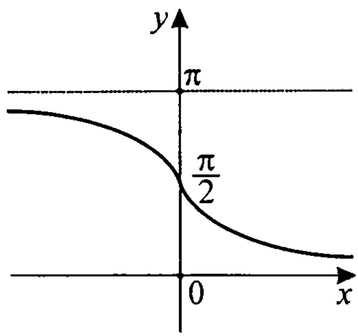
Рис. 45
</td><td>


Рис. 46
</td></tr>
<tr><td>Arcsin α, arctg α — угол первой четверти, если α — положительно, и угол четвертой четверти, если α — отрицательно.</td><td>Arccosin α, arcctg α — угол первой четверти, если α — положительно, и угол второй четверти, если α — отрицательно.</td></tr>
</table>

УРАВНЕНИЯ

Пусть даны две функции: $f(x)$ и $y = g(x)$. Если требуется найти все числа α из области, являющейся пересечением областей существования этих функций, для каждого из которых выполняется равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$, то говорят, что требуется **решить уравнение** $f(x) = g(x)$.
Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$ называется пересечение областей существования (областей определения) функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, т.е. множество всех числовых значений переменной x, при каждом из которых имеют смысл (определены) левая и правая части уравнения.
Допустимым значением для данного уравнения называется любое число x, принадлежащее ОДЗ уравнения.
Число α, принадлежащее ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$, называется **решением** или **корнем** уравнения, если при подстановке этого числа вместо переменной x в уравнение получается верное числовое равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$.
Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.
Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются **равносильными**, если множества их решений совпадают.

Таблица решений простейших уравнений

№ п/п	Уравнение	Условие	Решение
1.	$ax = b,\ a \neq 0$	b — любое	$x = \dfrac{b}{a}$
2.	$ax^2+bx+c=0,\ a \neq 0$	$D > 0$	$x_{1.2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
		$D = 0$	$x = \dfrac{b}{2a}$
		$D < 0$	корней нет

3.	$\lvert x \rvert = b$	$b > 0$ $b = 0$ $b < 0$	$x_1 = b,\ x_2 = -b$ $x = 0$ корней нет
4.	$\sqrt{x} = b$	$b \geq 0$ $b < 0$	$x = b^2$ корней нет
5.	$x^{2m} = b,\ m \in N$	$b > 0$ $b = 0$ $b < 0$	$x_1 = \sqrt[2m]{b},\ x_2 = -\sqrt[2m]{b}$ $x = 0$ корней нет
6.	$x^{2m+1} = b,\ m \in N$	b — любое	$x = \sqrt[2m+1]{b}$
7.	$a^x = b,\ a > 0,\ a \neq 1$	$b > 0$ $b \leq 0$	$x = \log_a b$ корней нет
8.	$\log_a x = b,\ a > 0,$ $a \neq 1$	b — любое	$x = a^b$
9.	$\sin x = b$	$\lvert b \rvert \leq 1$ $\lvert b \rvert > 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n,$ $n \in Z$ корней нет
10.	$\cos x = b$	$\lvert b \rvert \leq 1$ $\lvert b \rvert > 1$	$x = \pm \arccos b + 2\pi n,$ $n \in Z$ корней нет
11.	$\mathrm{tg}\, x = b$	b — любое	$x = \mathrm{arctg}\, b + \pi n,\ n \in Z$
12.	$\mathrm{ctg}\, x = b$	b — любое	$x = \mathrm{arcctg}\, b + \pi n,$ $n \in Z$
13.	$\arcsin x = b$	$\lvert b \rvert \leq \frac{\pi}{2}$ $\lvert b \rvert > \frac{\pi}{2}$	$x = \sin b$ корней нет
14.	$\arccos x = b$	$b \in [0;\ \pi]$ $b \notin [0;\ \pi]$	$x = \cos b$ корней нет
15.	$\mathrm{arctg}\, x = b$	$\lvert b \rvert < \frac{\pi}{2}$ $\lvert b \rvert \geq \frac{\pi}{2}$	$x = \mathrm{tg}\, b$ корней нет

НЕРАВЕНСТВА

Два выражения, числовые или буквенные, соединенные знаком «больше» (>) или «меньше» (<), образуют **неравенство** (числовое или буквенное).	Два неравенства, содержащие одни и те же неизвестные, называются **равносильными**, если они верны при одних и тех же значениях этих неизвестных.

Процесс решения неравенств заключается, в основном, в замене данного неравенства (или системы неравенств) другими равносильными.

Приемы при решении неравенств

- Замена одного выражения другим, тождественно ему равным.
- Перенос слагаемого из одной части неравенства в другую с переменой знака на обратный.
- Умножение или деление обеих частей неравенства на одно и то же число.

Алгебраические неравенства

Линейными (строгими и нестрогими) называются неравенства вида $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$, $a\neq 0$, решениями которых будут:

- при $a>0$

$$x\in\left(-\frac{b}{a};\infty\right);\ x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right);\ x\in\left(-\frac{b}{a};\infty\right);\ x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right);$$

- при $a<0$

$$x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right);\ x\in\left(-\frac{b}{a};\infty\right);\ x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right);\ x\in\left(-\frac{b}{a};\infty\right).$$

Числовые неравенства

Если $a > b$, то $b < a$.	Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
Если $a > b$, то $a + c > b + c$.	Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.
Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.	Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.
Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.	
Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.	
Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$.	
Если $a > b > 0$ и $0 < c < d$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.	
Если $a > b > 0$ и n — натуральное число, то $a^n > b^n$.	
$a^2 + b^2 \geq 2ab$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; ($a,b$ — числа одного знака).	

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Рассмотрим произвольную внутреннюю точку x_0 области определения функции $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x - x_0$, где x — также внутренняя точка области определения, называется **приращением аргумента в точке x_0**. Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется **приращением функции в точке x_0**, соответствующим приращению Δx, и обозначается $\Delta y = \Delta f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует и конечен:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Основные свойства производных

Если в точке x существуют конечные производные функций $v = v(x)$ и $u = u(x)$, то в этой точке существуют также производные суммы, разности, произведения и частного этих функций:

- $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$
- $(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$
- $(u(x) \cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)'$
- $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ (при $v(x) \neq 0$)
- $(Cu(x))' = Cu'(x)$, $C = \text{const}$

Производная сложной функции

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = g(x)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0:

$$h'(x_0) = g'(x_0) \cdot f'(x_0).$$

Достаточное условие монотонности функции

Если в каждой точке интервала $(a; b)$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале. Если $f'(x) < 0$, при $x \in (a; b)$, то $y = f(x)$ убывает на $(a; b)$.

Необходимое условие экстремума функции

Если точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x)$, то она равна нулю: $f'(x) = 0$.

Признак максимума функции

Если функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, непрерывна в точке $x_0 \in (a; b)$, имеет производную $f'(x)$ на интервалах $(a; x_0)$, $(x_0; b)$, и $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $(a; b)$, на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$.

Признак минимума функции

Если функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, непрерывна в точке $x_0 \in (a; b)$, имеет производную $f'(x)$ на интервалах $(x_0; b)$ и $(a; b)$, на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$, на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции $y = f(x)$.

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значения функции

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек (точек из области определения, в которых производная функции обращается в ноль или не существует), нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка и выбрать наибольшее и наименьшее из полученных чисел.

Производные элементарных функций

$y = f(x)$	$y = f'(x)$	$y = f(x)$	$y = f'(x)$
$y = c$ ($c = \text{const}$)	$y' = 0$	$y = ax+b$	$y' = a$
$y = x^2$	$y' = 2x$	$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \cos x$	$y' = \sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Производные элементарных функций			
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производные

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Интегралы

$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int a^x\, dx = \frac{ax}{\ln a} + C$

$\int e^x\, dx = e^x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg}\, \frac{x}{a} + C$

ГЕОМЕТРИЯ

ТРЕУГОЛЬНИКИ

Треугольник — это многоугольник с тремя сторонами. Стороны треугольника обозначаются малыми буквами, соответствующими обозначению противоположных вершин.

Если все три угла острые — треугольник **остроугольный** (рис. 47).

Если один из углов прямой — **прямоугольный** (рис. 48); стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (*a* и *b*), сторона против прямого угла — **гипотенузой** (*c*).

Если один из углов тупой — треугольник **тупоугольный** (рис. 49).

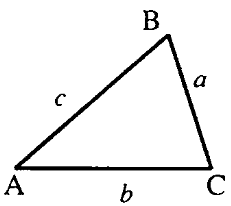


Рис. 47

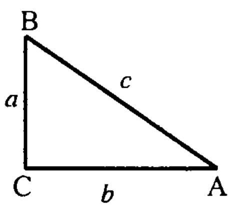


Рис. 48

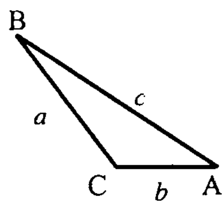


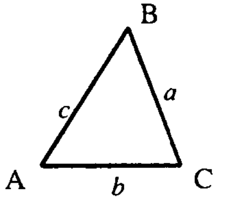
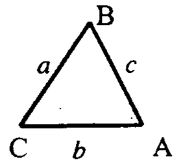
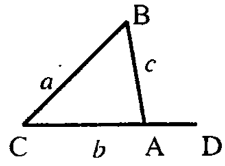
Рис. 49

Треугольник ABC **равнобедренный** (рис. 50), если его две стороны равны ($a = c$); **равносторонний** (рис. 51), если его три стороны равны ($a = c = b$).

Равные стороны равнобедренного треугольника называются **боковыми**, третья сторона — **основанием**.

Во всяком треугольнике против большей стороны лежит больший угол; против равных сторон — равные углы и обратно.

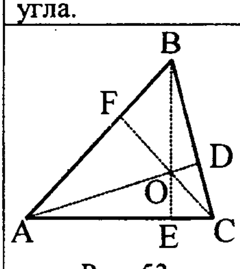
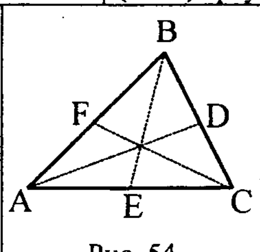
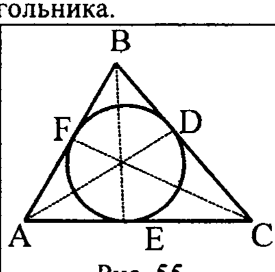
Равносторонний треугольник имеет равные углы и наоборот: если углы треугольника равны, то он является **равносторонним**.

 Рис. 50	 Рис. 51	 Рис. 52

Во всяком треугольнике сумма углов равна 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. В равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.	Продолжив одну из сторон треугольника ABC (AC на рис. 52), получим внешний угол $\angle BAD$. Внешний угол равен сумме внутренних, с ним не смежных: $\angle BAD = \angle C + \angle B$.

Замечательные линии и точки треугольника

Всякая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон: $a < c+b$; $a > c-b$.	**Высота** треугольника — перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение.
Точка пересечения трех высот треугольника называется **ортоцентром** (рис. 53). В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника, в прямоугольном совпадает с вершиной прямого угла.	**Медианой** треугольника называется отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 54). Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (всегда внутри треугольника), являющейся **центром тяжести (масс)** треугольника.

 Рис. 53	 Рис. 54	 Рис. 55

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла от вершины до пересечения с противоположной стороной.	Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (всегда внутри треугольника), являющейся центром вписанного круга (рис. 55).
Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам: $AE : EC = AB : BC$.	Биссектриса делит угол пополам. Высота опускается на противоположную сторону под прямым углом.
Медиана делит треугольник на два равновеликих. Медиана делит противоположную сторону пополам.	

Произвольный треугольник

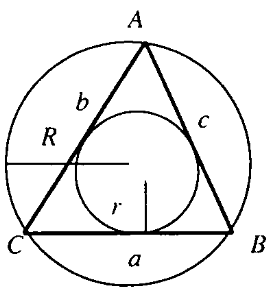


Рис. 56

Теорема синусов:
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$
Теорема косинусов:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Полупериметр: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$R = \dfrac{abc}{4S}$; $r = \dfrac{S}{p}$ (рис. 56).

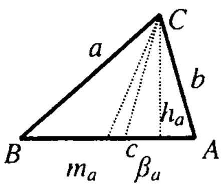


Рис. 57

Площадь $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C$

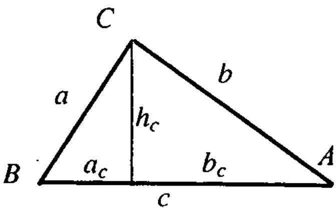
h_a — высота (рис. 57).

Формула Герона:
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

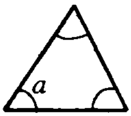
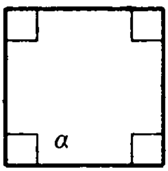
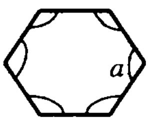
Медиана
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$
Пересекаясь, медианы делятся как 2:1.

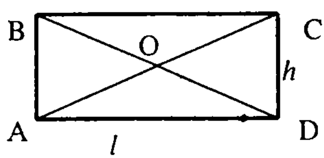
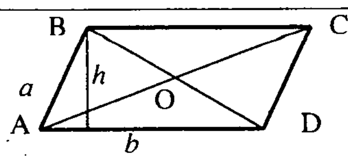
Биссектриса
$$\beta_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(b+c)^2 - a}$$

Прямоугольный треугольник

 Рис. 58.	$a^2 = ca_c;\ b^2 = cb_c;$ $h^2 = a_c\, b_c.$ **Теорема Пифагора:** $c^2 = a^2 + b^2.$
В **равнобедренном** треугольнике высота, медиана и биссектриса, опущенные на основание, а также перпендикуляр, проведенный через середину основания, совпадают друг с другом. В **равностороннем** треугольнике это выполняется для всех сторон. В остальных случаях ни одна из этих линий с другой не совпадает.	Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке, являющейся центром описанного круга. В **тупоугольном** треугольнике эта точка лежит вне треугольника, в **остроугольном** — внутри, в **прямоугольном** — на середине гипотенузы.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ
(со стороной *a*)

	α	r	R	S
 Рис. 59	$\alpha = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
 Рис. 60	$\alpha = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	a^2
 Рис. 61	$\alpha = 120^\circ = \dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

ПРЯМОУГОЛЬНИК $S = hl$; $\lvert AC\rvert = \lvert BD\rvert$, $\lvert BO\rvert = \lvert OD\rvert$	 Рис. 62
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ $S = ab\sin\alpha$; $\lvert AC\rvert^2 + \lvert BD\rvert^2 = 2(a^2 + b^2)$	 Рис. 63

РОМБ

$S = ah$; $S = a^2 \sin A$;

$S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$.

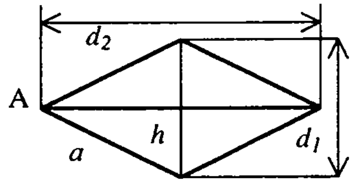


Рис. 64

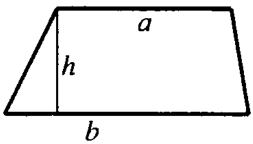


Рис. 65

ТРАПЕЦИЯ

$S = \dfrac{a+b}{2} h$.

ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ, их элементы

Окружность: $C = 2\pi R$.

Круг: $S = \pi R^2$.

Дуга: $L_{AB} = R\alpha\, рад = \dfrac{2\pi R\alpha^o}{360^o}$.

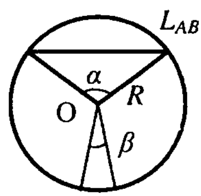


Рис. 66

Сектор: $S_{сект} = \dfrac{R^2 \alpha\, рад}{2} = \dfrac{\pi R^2 \alpha^o}{360^o}$

Сегмент: $S_{сегм} = S_{сект} - S_{AOB}$.

Признаки подобия треугольников

Два треугольника **подобны**, если: • их стороны пропорциональны; • углы двух треугольников соответственно равны; • две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны.	Прямоугольные треугольники **подобны**, если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого.

ВЕКТОРЫ

Вектор — это величина, определяемая не только численным значением, но и направлением в пространстве.	**Скаляр** — это величина, определяемая только численным значением.

Действия с векторами

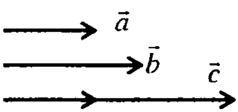
<table>
<tr><td>Сложение векторов
а) векторы направлены в одну сторону:


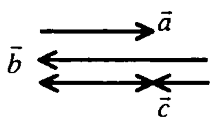
Рис. 67</td><td>В векторном виде результирующий вектор:
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$;
в скалярном виде:
$c = a+b$
(рис. 67).</td></tr>
<tr><td>б) векторы направлены в противоположные стороны:


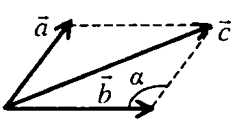
Рис. 68</td><td>в векторном виде:
$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$;
в скалярном виде:
$c = b - a$
(рис. 68).</td></tr>
<tr><td>в) векторы направлены под углом друг к другу:


Рис. 69
Сложение осуществляется по правилу параллелограмма или треугольника.</td><td>В векторном виде результирующий вектор:
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
В скалярном виде для нахождения R необходимо воспользоваться теоремой косинусов.</td></tr>
</table>

Теорема косинусов: квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус тупого угла:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

где α — тупой угол между вектором $\vec{b}$ и перенесенным в конец вектора $\vec{b}$ вектором $\vec{a}$ (рис. 69).

В случае, если угол $\alpha = 90^0$, $\cos\alpha = 0$, теорема косинусов превращается в **теорему Пифагора**:

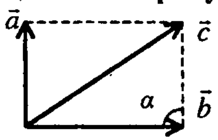


Рис. 70

Теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (рис. 70):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Разложение вектора на составляющие

Осуществляется по правилу параллелограмма, в котором разлагаемый вектор является диагональю, а результирующие векторы — сторонами:

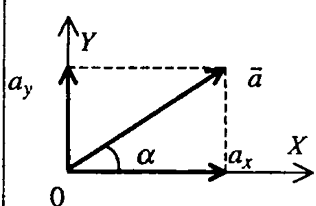


Рис. 71

Разложение вектора $\vec{a}$ на составляющие по координатным осям X и Y дает два вектора: a_x и a_y, модули которых:

$$a_x = a\cos\alpha;$$

$$a_y = a\sin\alpha$$

(рис. 71).

Проекции векторов на оси

Проекции векторов на оси всегда скаляры:

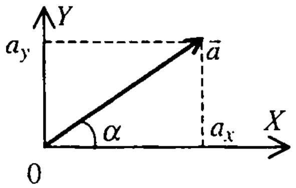


Рис. 72

$a_x = a\cos\alpha;$

$a_y = a\sin\alpha.$

Если направление вектора совпадает с направлением оси, проекция положительна (рис. 72), если нет — отрицательна.

Векторы

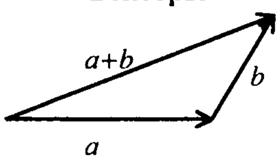


Рис. 73

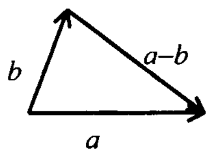


Рис. 74

Скалярное произведение

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}});$$

$$\text{для } \vec{a}\perp\vec{b}\ (\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0.$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{a}) = a^2.$$

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Углы

Двугранный

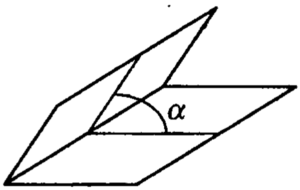


Рис. 75.

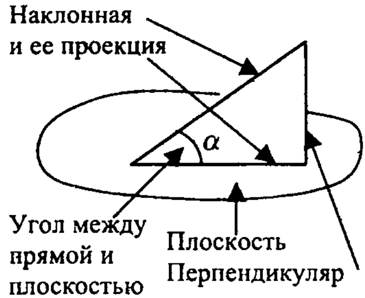


Рис.76

Призмы

Прямая

$V = S_{осн.} \cdot h$

$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h$

$P_{осн.} = a + b + c$

$S_{полн.} = S_{бок} + 2S_{осн.}$

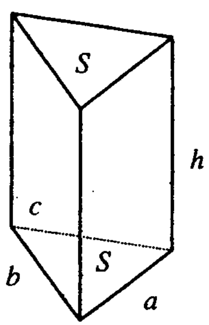


Рис. 77

Наклонная

$S_{бок.} = P_{пс} \cdot a$

$V = S_{пс} \cdot a$,

a — боковое ребро;

$S_{пс}$ — площадь перпендикулярного сечения;

$P_{пс}$ — периметр.

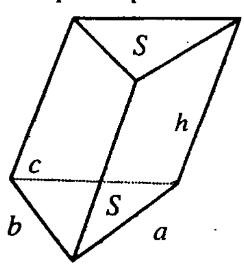
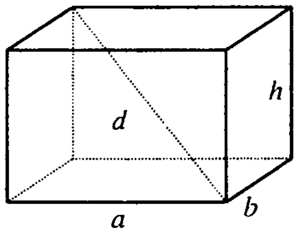
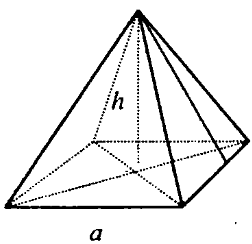
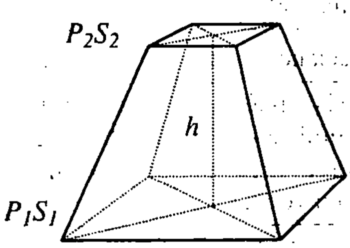


Рис. 78

Прямоугольный параллелепипед

 Рис. 79	Параллелепипед $V = S_{осн} \cdot h$ Прямоугольный $V = abh$ $S_{бок.} = 2(a + b)\,h$ $d^2 = a^2 + b^2 + h^2$

Пирамиды

Правильная пирамида  Рис. 80	$V = \frac{h}{3} S_{осн}$ $S_{бок.} = \frac{a}{2} P$ $S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}$
Усеченная пирамида  Рис. 81	$V = \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$ S_1 и S_2 — площади оснований $S_{бок.} = \frac{a}{2}(P_1 + P_2)$ $S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2$ P, S — периметр и площадь оснований.

Сумма *смежных* углов = 180°.	***Вертикальные*** углы равны (общая вершина, стороны одного составляют продолжение сторон другого).
Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.	**Аксиома** (основное свойство ***параллельных прямых***): через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости только одну прямую, параллельную данной.

Следствия	
1. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то пересечет и другую.	2. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

Признаки параллельности прямых	
1. Если при пересечении 2-х прямых на плоскости внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.	2. Если при пересечении 2-х прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
3. Если при пересечении 2-х прямых секущей на плоскости сумма внутренних односторонних углов равна180°, то прямые параллельны.	4. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы соответственно равны, сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

Перпедикулярные прямые пересекаются под углом 90°.	
1.Через каждую точку прямой можно провести параллельную ей прямую, и только одну.	2. Из любой точки данной прямой можно опустить перпендикуляр на данную прямую и только один.
3. Две прямые, параллельные третьей, параллельны.	4. Если прямая параллельна одной из параллельных прямых, то она параллельна и другой.

Многоугольник (n-угольник)

1. Любой правильный выпуклый многоугольник можно вписать в окружность и описать вокруг него окружность. (R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности)

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^{o}}{n}};\ r = \frac{a}{2tg180^{o}}.$$

Треугольник

1. Все 3 высоты каждого треугольника пересекаются в одной точке (**ортоцентр**).

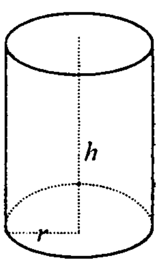
2. Все 3 медианы пересекаются в одной точке (**центр тяжести**) — делит каждую медиану в отношении 2:1 (считая от вершины).

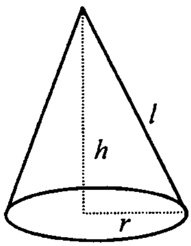
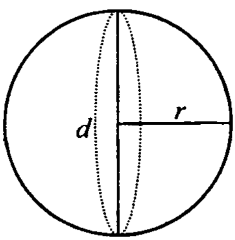
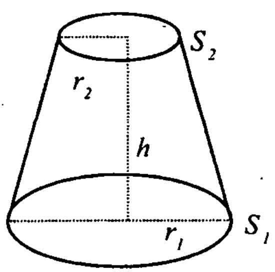
3. Все 3 биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанного круга.

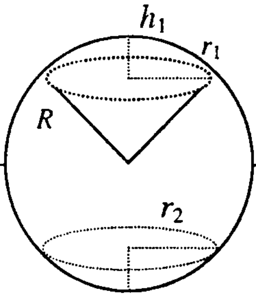
4. Все 3 высоты, восстановленные из середин сторон треугольника, пересекаются в одной точке — центре описанного круга.

5. **Средняя линия** параллельна основанию и равна $\frac{1}{2}$ основания.

Тела вращения

	Площади	Объемы
ЦИЛИНДР  Рис. 82	$S_{бок} = 2\pi rh$ $S_{полн} = 2\pi r(h+r)$	$V = \pi r^2 h$

КОНУС  Рис. 83	$S_{бок} = \pi r l$ $S_{полн} = \pi r(l+r)$	$V = \frac{1}{3} \pi r^3 h$
ШАР  Рис. 84	$S = 4\pi r^2$ $S = \pi d^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $V = \frac{1}{6} \pi d^3$
УСЕЧЕННЫЙ КОНУС  Рис. 85	$S_{бок} = \pi l(r_1+r_2)$ $S_{полн} =$ $= S_{бок}+S_1+S_2$	$V = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 +$ $+ r_1 r_2 + r_2^2)$

СЕКТОР 	$S_{кривой} = 2\pi r h_1$ $S_{полн} = S_{кривой} +$ $+S_{осн.конуса}$	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h_1$
СЕГМЕНТ Рис. 86	$S_{кривой} = 2\pi r h_2$ $S_{полн} = S_{кривой} +$ $+\pi r_1^2$	$V = \pi h_2^2 (R - \frac{1}{3} h_2)$ $V = \frac{1}{6}\pi h_2 (h_2^2 +$ $+3r_2^2)$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1965. — 423 с.

2. *Мишняков Н.Т., Катрухина Р.В.* Математика для поступающих в ДГТУ. Методические указания, тестовые задания и контрольные работы. Издание 2-е, переработанное. Ростов н/Д: ДГТУ, 2002. — 331 с.

3. Программа для поступающих в вуз по математике.

4. *Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Лекции и задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1972. — 592 с.

5. Учебное пособие. Школа. «Абитуриент» — 2002.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Серия «Библиотека школьника»

Светлана Георгиевна Хорошавина

ШПАРГАЛКА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответственный редактор *Оксана Морозова*
Технический редактор *Галина Логвинова*

Формат 84г108 1/32. Бумага типографская.
Тираж 3 000 экз. Заказ 661.

ООО «Феникс»
344082 г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга».
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.
Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.